

Traitement des quantités duales d'interface par une représentation dans $H^{1/2}$ pour une méthode de décomposition de domaine mixte.

G. Desmeure^a, P. Gosselet^a, C. Rey^a, P. Cresta^b

a. LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris), 61 av. du Président Wilson, 94230 Cachan, France.

b. EADS Innovation Works France – Computational Structural Mechanics, 18 rue Marius Terce, 31025 Toulouse France.

Résumé :

Dans le but de traiter de grands problèmes de structure comprenant des comportements complexes, nous proposons une méthode de décomposition de domaine mixte, basée sur un algorithme de résolution de type LaTIn, dont l'efficacité repose sur une représentation pertinente des efforts d'interface dans l'espace de Hilbert $H^{1/2}$. Les performances comparées de plusieurs mises en dualité (L^2 , $H^{1/2}$, discrète) couplées à différentes discrétisations d'interface ($P0$, $P1$) sont présentées sur un exemple académique.

Abstract :

In order to handle large structural problems involving complex behaviors, we propose a mixed domain decomposition method the effectiveness of which is based on an appropriate representation of the interface efforts in the Hilbert space $H^{1/2}$ and a LaTIn-type resolution algorithm. The comparative performance of several duality implementation (L^2 , $H^{1/2}$ discrete) coupled with different discretizations of the interface ($P0$, $P1$) are presented on an academic example.

Mots clefs : Décomposition de domaine, méthode LaTIn, produit scalaire $H^{1/2}$.

1 Introduction

Les industries mécaniques expriment un besoin croissant de représentativité des modèles employés. Il en résulte une forte augmentation de la taille des systèmes discrets associés qui ne peut être gérée que par le développement de méthodes de résolutions adaptées. Parmi ces méthodes, les décompositions de domaine [5] permettent d'exploiter les installations de plus en plus courantes de type cluster. Robustes et fiables, elles doivent cependant être améliorées afin de traiter les problèmes les plus complexes.

On choisit ici de travailler sur une méthode mixte dont la sous-structuration basée sur le solveur LaTIn [6] présente des avantages conséquents pour le traitement de problèmes complexes. Elle permet le traitement localisé des non-linéarités matérielles, la mise en œuvre de comportements spécifiques sur les interfaces entre sous-domaines facilitée par leur discrétisation propre et un raccord faible de type mortar [4] pour le traitement des non-conformités ou encore l'extensibilité par transition d'information macroscopique dans la structure. Mais les choix classiques de discrétisation des interfaces mixtes et d'interpolation de leurs quantités [7] peuvent poser des problèmes de stabilité. Or dans [2], un cadre mathématique simple, reposant sur l'utilisation d'un représentant dual des effort d'interface dans $H^{1/2}$, est présenté pour la méthode FETI. On se propose ici d'appliquer théorème de représentation de Riesz au calcul du travail des interefforts sur les déplacements d'interface afin de ne travailler qu'avec des quantités de $H^{1/2}$. Cette simplicité, se payant par l'évaluation complexe d'une matrice de masse d'interface pleine, permet de mieux représenter les quantités cinématiques et d'effort des

interfaces et d'améliorer la convergence. Dans le cas de la méthode LaTIn, elle impose également de repenser certains paramètres (direction de recherche, espace macroscopique, ...)

La deuxième section de l'article présente, tout d'abord, la formulation continue de la méthode de décomposition de domaine de type LaTIn puis les choix de discrétisations du problème et leurs conséquences. L'introduction du représentant de l'intereffort est ensuite abordée avant le détail du calcul du produit scalaire de $H^{1/2}$. Enfin la troisième section présente une étude de performances comparées sur un cas test académique.

2 La méthode de décomposition de domaine

2.1 Formulation continue

On modélise le domaine à étudier Ω comme un assemblage de constituants simples : sous-structures et interfaces [6], voir figure 1. Chacun d'entre eux possède ses propres variables et ses propres équations. La frontière $\partial\Omega_E$ d'une sous-structure $\Omega_{E \in \mathbf{E}}$ est soumise à la distribution d'efforts $\underline{\mathbf{F}}_E$ et de déplacements $\underline{\mathbf{W}}_E$. L'interface $\Gamma_{EE'}$ gère le lien entre les composantes respectives des couples $(\underline{\mathbf{W}}_E, \underline{\mathbf{F}}_E)$ et $(\underline{\mathbf{W}}_{E'}, \underline{\mathbf{F}}_{E'})$. Le domaine Ω est soumis à des efforts volumiques \underline{f}_d et sur sa frontière à des sollicitations en effort sur $\partial_f\Omega$ et en déplacement sur $\partial_u\Omega$.

2.1.1 Séparation des équations

La décomposition en constituants simples entraîne une séparation des équations en deux groupes présentée ici dans le cas particulier de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations. La solution $s = \{s_E, E \in \mathbf{E}\}$ où $s_E = (\underline{\mathbf{u}}_E, \underline{\mathbf{W}}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{\mathbf{F}}_E)$, avec $\underline{\mathbf{u}}_E$ le déplacement dans la sous-structure et $\underline{\sigma}_E$ la contrainte, doit vérifier :

- Le groupe d'équations \mathbf{A}_d qui traduit l'admissibilité du comportement des sous-structures :

Equations de liaison :	$\underline{\mathbf{u}}_E$ suffisamment régulier,	
	$\underline{\mathbf{u}}_E _{\partial\Omega_E} = \underline{\mathbf{W}}_E$	
Equations d'équilibre :	$\forall \underline{\mathbf{u}}^*, \int_{\Omega_E} \underline{\sigma}_E : \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{u}}^*) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbf{F}}_E \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega$	(A _d)
Relation de Comportement :	$\underline{\sigma}_E = \mathcal{K} : \underline{\varepsilon}_E$	

- Le groupe d'équations Γ qui traduit le comportement des interfaces :

Comportement des interfaces :	Cas général :	$\underline{\mathbf{F}}_E = b(\underline{\mathbf{W}}_{E'} - \underline{\mathbf{W}}_E)$	(Γ)
	Cas interface parfaite :	$\underline{\mathbf{W}}_E = \underline{\mathbf{W}}_{E'}, \quad \underline{\mathbf{F}}_E + \underline{\mathbf{F}}_{E'} = 0,$	
	C.L. sur $\partial_f\Omega$ et $\partial_u\Omega$.		

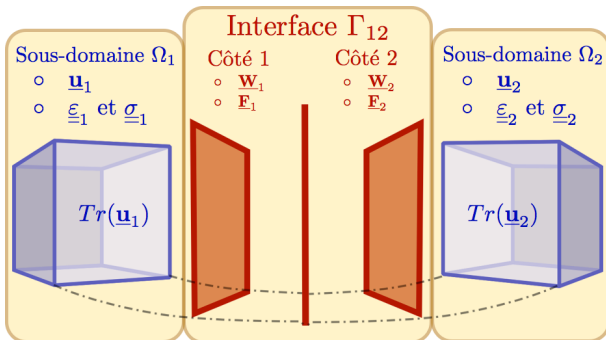


FIGURE 1 – Sous-structuration sur un cas à deux sous-domaines.

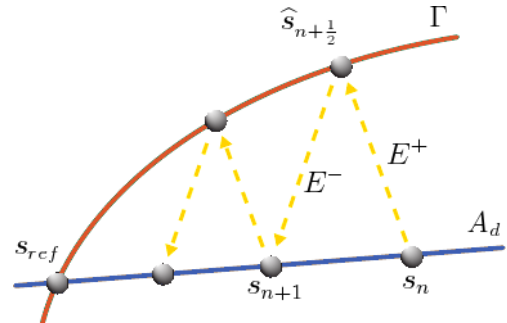


FIGURE 2 – Algorithme de résolution LaTIn.

2.1.2 Méthode de résolution

La solution se trouve à l'intersection des espaces définis par les deux groupes d'équations : $s_{ref} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$, voir figure 2. La résolution consiste ainsi à effectuer des itérations de passage d'un groupe d'équations à l'autre en complétant le système par les équations de directions de recherche :

$$\begin{aligned}
 \text{Etape locale :} \quad & \text{Connaissant } (\underline{\mathbf{W}}_E^n, \underline{\mathbf{F}}_E^n) \text{ trouver } (\underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}}) \text{ tel que :} \\
 & \text{En tout point de } \Gamma_E, \left(\underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{F}}_E^n \right) + k_E^+ \left(\underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{W}}_E^n \right) = 0 \\
 \text{Etape linéaire :} \quad & \text{Connaissant } (\underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}}) \text{ trouver } (\underline{\mathbf{W}}_E^{n+1}, \underline{\mathbf{F}}_E^{n+1}) \text{ tel que :} \\
 & \text{En tout point de } \Gamma_E, \left(\underline{\mathbf{F}}_E^{n+1} - \underline{\mathbf{F}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) + k_E^- \left(\underline{\mathbf{W}}_E^{n+1} - \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Discrétisations du problème

La résolution se fait par la méthode des éléments finis. On discrétise le déplacement dans les sous-structures $\underline{\mathbf{u}}$, les déplacements d'interface $\underline{\mathbf{W}}$ et les interefforts $\underline{\mathbf{F}}$. Le choix classique, présenté dans [7] est d'utiliser des élément $P1$ pour les déplacements dans les sous-structures et $P0$ pour les quantités sur les interfaces. Cette représentation discontinue des quantités d'interface est motivée par la non-continuité a priori des interefforts. Les calculs sur les interfaces sont ainsi effectués aux points de Gauss et un raccord de type mortar [4] s'impose pour faire le lien entre sous-structures et interfaces que les maillages des sous-structures soient compatibles ou non. Ce type d'interpolation présente des problèmes de mauvaise prise en compte de l'énergie de modes oscillants qui introduisent une erreur en énergie dans les zones à fort gradient et pénalisent la convergence de la méthode. Afin de pallier ces difficultés, deux solutions de raffinement des discrétisations des déplacements dans les sous-structures sont proposées. Elles consistent à rajouter sur leurs bords :

- des éléments (version h) : sur-discrétisation des sous-structures vis-à-vis des interfaces ;
- des point de Gauss (version p) : sous-intégration des quantités d'interface vis-à-vis des quantités des sous-structures.

Pour s'affranchir de ces procédures et vérifier exactement la relation de trace $\text{Tr}(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{W}}$, nous nous plaçons dans un cadre où la discrétisation des quantités duales ne pose pas de difficulté. On appelle $b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot)$ la forme linéaire continue de travail associée à l'intereffort $\underline{\mathbf{F}}$:

$$b_{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{W}}) = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{F}}(\underline{x}) \cdot \underline{\mathbf{W}}(\underline{x}) d\underline{x} = \langle \underline{\mathbf{F}}; \underline{\mathbf{W}} \rangle_{L^2} \tag{2}$$

Les déplacements d'interface $\underline{\mathbf{W}}$ appartenant à l'espace de Hilbert $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot)$ à l'espace $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, l'application du théorème de représentation de Riesz à $b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot)$ permet d'introduire un représentant $\underline{\mathbf{T}}$ de l'intereffort $\underline{\mathbf{F}}$:

$$\begin{aligned}
 \forall b_{\underline{\mathbf{F}}}(\cdot) \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \exists! \underline{\mathbf{T}} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ tel que :} \\
 \forall \underline{\mathbf{W}} \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad b_{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{W}}) = \langle \underline{\mathbf{F}}; \underline{\mathbf{W}} \rangle_{L^2} = \langle \underline{\mathbf{T}}; \underline{\mathbf{W}} \rangle_{H^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{3}$$

où le produit scalaire de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est donné par [1] :

$$\langle \underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{T}} \rangle_{H^{1/2}} = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{W}}(\underline{x}) \underline{\mathbf{T}}(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(\underline{\mathbf{W}}(\underline{x}) - \underline{\mathbf{W}}(\underline{y}))(\underline{\mathbf{T}}(\underline{x}) - \underline{\mathbf{T}}(\underline{y}))}{|\underline{x} - \underline{y}|^d} d\underline{x} d\underline{y} \tag{4}$$

L'utilisation du représentant $\underline{\mathbf{T}}$ dans l'écriture et la résolution du problème permet de ne travailler, au niveau des interfaces, qu'avec des quantités de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour lesquelles les fonctions de formes sont choisies naturellement comme les traces des fonctions de formes utilisées dans les sous-domaines. Le lien mortar n'est alors plus nécessaire dans les cas de maillages compatibles.

2.3 Formulation de la méthode avec représentant dual de l'intereffort

La méthode peut ainsi être réécrite avec le représentant $\underline{\mathbf{T}}$, en particulier les directions de recherche qui relient maintenant $\underline{\mathbf{W}}$ à $\underline{\mathbf{T}}$ et non plus à $\underline{\mathbf{F}}$. L'étape linéaire devient alors :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* d\Omega + k \langle \underline{\mathbf{W}}^n, \underline{\mathbf{W}}^* \rangle_{H^{1/2}} = \langle k \underline{\mathbf{W}}^{n-\frac{1}{2}} + \underline{\mathbf{T}}^{n-\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{W}}^* \rangle_{H^{1/2}} + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Omega \quad (5)$$

L'étape locale est également reformulée sur les représentants des interefforts.

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\mathbf{W}}_{E'}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \underline{\mathbf{T}}_E^{n+\frac{1}{2}} + \underline{\mathbf{T}}_{E'}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ (\underline{\mathbf{T}}_E^n - \underline{\mathbf{T}}_E^{n+\frac{1}{2}}) + k_E^- (\underline{\mathbf{W}}_E^n - \underline{\mathbf{W}}_E^{n+\frac{1}{2}}) = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Cette reformulation impose de savoir calculer le produit scalaire de $H^{1/2}$.

2.4 Calcul du produit scalaire de $H^{1/2}$

Le calcul du produit scalaire de $H^{1/2}$ est délicat à cause du terme sous l'intégrale double présentant une singularité fictive. Une alternative possible aux méthodes couteuses de changements de variables consiste à calculer des approximations de ce produit scalaire qui soient suffisamment fines pour ne pas dénaturer le lien de dualité. Ainsi, en se basant sur le calcul approché du produit scalaire de $H_{00}^{1/2}$ utilisé dans [3], nous proposons pour des maillages réguliers de pas h , le calcul suivant :

$$\langle \underline{\mathbf{T}}; \underline{\mathbf{W}} \rangle_{H_h^{1/2}} = \langle \underline{\mathbf{T}}; \underline{\mathbf{W}} \rangle_{L_h^2} + \alpha \times \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1, l \neq k}^{N_n} h^2 \frac{(\underline{\mathbf{T}}_k - \underline{\mathbf{T}}_l) (\underline{\mathbf{W}}_k - \underline{\mathbf{W}}_l)}{|x_k - x_l|^2} \quad (7)$$

où N_n est le nombre de noeuds sur l'interface considérée, x_i la position du $i^{\text{ème}}$ noeuds et $\underline{\mathbf{A}}_i$ la valeur au point x_i du vecteur $\underline{\mathbf{A}}$ discrétisé. Le coefficient α est homogène à une longueur. La résolution d'un problème aux valeurs propres généralisées sur les matrices de masses obtenues par calcul exact et par calcul approché conforte l'hypothèse d'équivalence entre (7) et (4).

3 Etude comparative

Afin d'effectuer des comparaisons de performances, on s'intéresse également au calcul discret du travail sur l'interface. Cela revient à considérer des interefforts nodaux. L'étape linéaire pour cette méthode s'écrit :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* d\Omega + k \sum_{i=1}^{N_{node}} \underline{\mathbf{W}}(x_i) \cdot \underline{\mathbf{W}}^*(x_i) = \sum_{i=1}^{N_{node}} (k \widehat{\underline{\mathbf{W}}}(x_i) + \widehat{\underline{\mathbf{F}}}(x_i)) \cdot \underline{\mathbf{W}}^*(x_i) + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Omega \quad (8)$$

3.1 Présentation du cas test

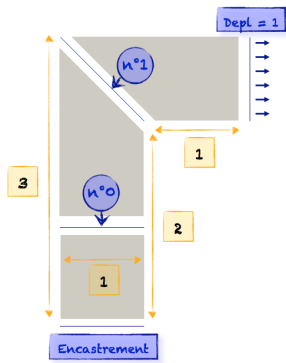


FIGURE 3 – Le cas test.

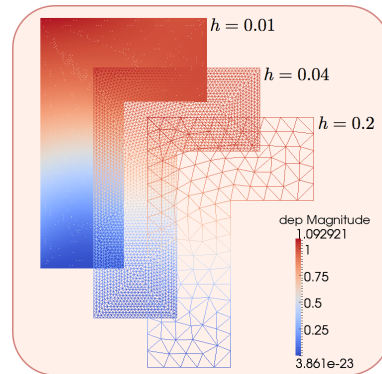


FIGURE 4 – Présentation des trois maillages testés.

Les performances des méthodes sont évaluées sur un demi-portique dont les spécifications (dimensions, conditions limites, sous-structuration et numérotation des interfaces) sont présentées figure 3. L'étude se fait dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope avec un matériau de module d'Young $E = 1$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, en 2D sous l'hypothèse des déformations planes. Le domaine est décomposé en trois sous-structures présentées de sorte à avoir une interface, la numéro 1, passant par la singularité de coin. Les maillages des sous-domaines sont compatibles et réguliers. Trois valeurs de pas h sont étudiées : 0.2, 0.04 et 0.01, voir figure 4. Les études sont menées à 50 itérations imposées et avec des paramètres α (7) et \mathbf{k} (1) optimisés pour chaque cas. On observe l'évolution brute des deux critères suivants :

$$E_{saut}^{\Gamma_{12}} = \sqrt{(\text{Tr}(\mathbf{u}_1) - \text{Tr}(\mathbf{u}_2)) \cdot (\text{Tr}(\mathbf{u}_1) - \text{Tr}(\mathbf{u}_2))} \quad (9)$$

$$E_F^{\Gamma_{12}} = \|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|_{L^2} \quad \text{ou} \quad E_F^{\Gamma_{12}} = \|\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\|_{H^{1/2}} \quad \text{ou} \quad E_F^{\Gamma_{12}} = \|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|_{\text{discret}} \quad (10)$$

Le deuxième est à choisir en fonction du cas testé.

3.2 Résultats

Les tracés présentent l'évolution des quantités de l'interface numéro 1. Chaque figure comporte à gauche, l'évolution en fonction des itérations du critère en saut et à droite, celle du critère en équilibre. La correspondance entre les figures et les méthodes utilisées est donnée tableau 1.

TABLE 1 – Correspondances figures-méthodes.

	Produit scalaire de travail	Discrétisation \mathbf{W}	Discrétisation \mathbf{F} ou \mathbf{T}
Figure 5	$H^{1/2}$	$P1$	$P1$
Figure 6	L^2	$P0$	$P0$
Figure 7	discret	$P1$	nodale

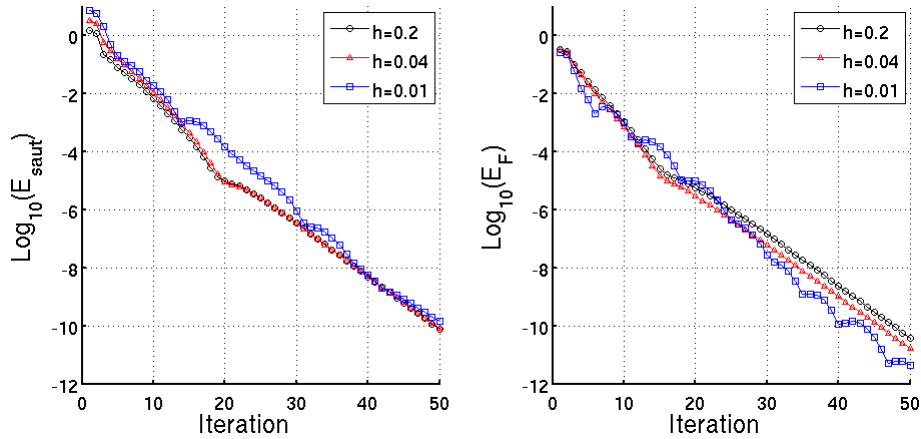


FIGURE 5 – Méthode avec produit scalaire $H^{1/2}$, interface discrétisée avec éléments $P1$.

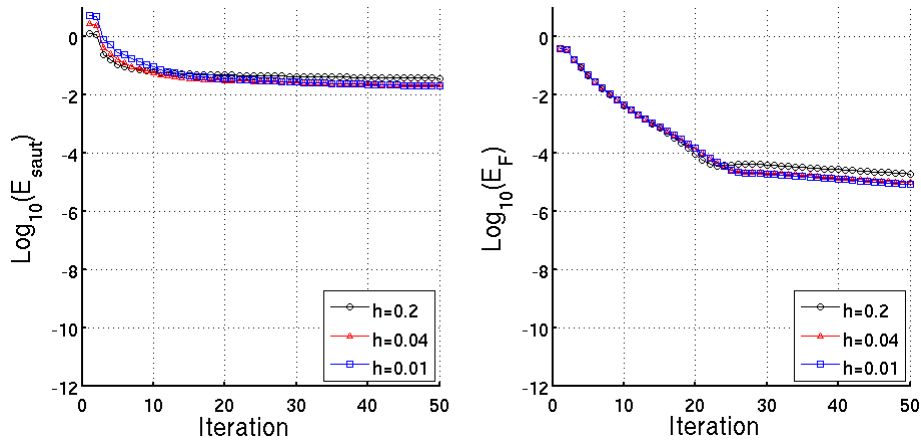
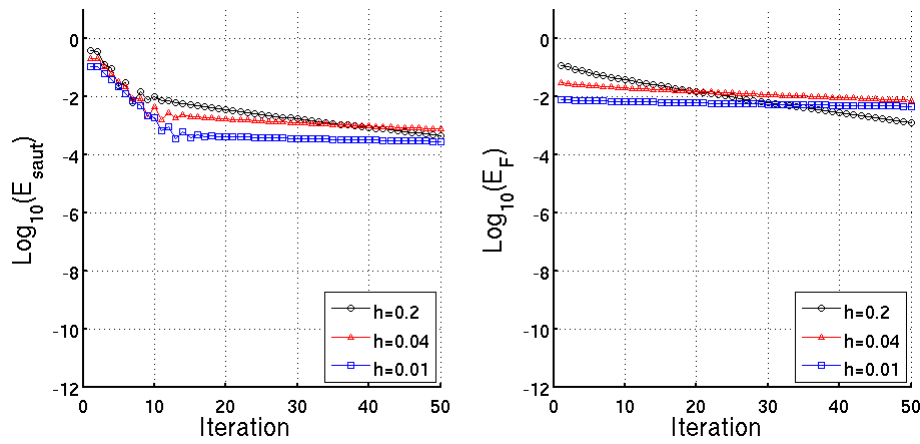


FIGURE 6 – Méthode avec produit scalaire L^2 , interface discrétisée avec éléments $P0$.

FIGURE 7 – Méthode avec produit scalaire discret, interface discrétisée avec éléments $P1$.

4 Conclusion

L'utilisation d'un représentant dual au sens du produit scalaire de $H^{1/2}$ de l'inter-effort fournit un cadre mathématique simple pour la méthode de décomposition de domaine mixte présentée mais impose de savoir calculer ce produit scalaire. Les difficultés présentées par ce calcul sont contournées à l'aide d'une approximation de la formule continue. Les choix de discrétisations des interfaces et d'interpolations des quantités associées sont ainsi simplifiés ce qui améliore la représentation des quantités et la convergence de la méthode. La suite des travaux portera sur l'extension de la méthode au cas multi-échelle et sur la mise en œuvre de comportements d'interface complexes.

Références

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces, Second Edition*, Academic Press, 2003.
- [2] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera. *A FETI method with a mesh independant condition number for the iteration matrix*, Comput. Methods Appl. Mech and Engrg., 197 p1410-p1429, 2008.
- [3] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, F. Coronil, *A posteriori error analysis for two non-overlapping domain decomposition techniques*, Appl. Numer. Math., 59 p1214-p1236, 2009.
- [4] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera. *A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar element method*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Pitman, H. Brezis J. Lions (Eds.), page13-page51, 1994.
- [5] P. Gosselet, C. Rey. *Non-overlapping Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics*, Arch. Comput. Meth. Engrg., 13 p515-p572, 2006.
- [6] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer-Verlag, 1999.
- [7] P. Ladeveze, A. Nouy, O. Loiseau. *A multiscale computational approach for contact problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191, p4869-p4891, 2002.